

Problém rovnomerných rozvrhov a stochastické programovanie

Ladovský Tomáš · Informačné technológie

22.08.2011



Článok sa venuje problému tvorby rovnomerných rozvrhov pri neistote. Tieto rovnomerné rozvrhy môžeme zovšeobecniť a riešiť ako problém rovnomernosti riadkových súčtov stĺpcovo permutovanej matice. Nás zaujíma výhradne dvojriadkový variant problému, pričom prvky matice sú modelované náhodnými premennými normálneho rozdelenia pravdepodobnosti. Dvojriadkovú stochastickú maticu vieme riešiť exaktne transformáciou na bivalentný program známy pod názvom stochastická úloha o batohu. Pre každý prezentovaný problém je riešený ilustračný príklad.

1. Úvod

V tomto článku rozumieme pod pojmom tvorba rozvrhu alebo **rozvrhovanie** proces rozhodovania, ktorý sa používa vo výrobnom priemysle, vo verejnej doprave a v iných odvetviach a službách. Pracuje s pridelovaním aktivít k zdrojom nad danými časovými periódami a snaží sa optimalizovať jednu alebo viac kritériálnych funkcií tak, aby boli splnené všetky podmienky priradené k jednotlivým aktivitám a zdrojom. Z iného pohľadu je tvorba rozvrhov problémom časového plánovania a kombinatorickej optimalizácie. To sú problémy, v ktorých vystupujú diskkrétne premenné a v ktorých množina prípustných riešení je konečná. V každom z týchto problémov sa skrýva možnosť kombinatorickej explózie.

Rozvrh je súbor údajov, z ktorého je zrejmé, v ktorých časových intervaloch sa majú jednotlivé aktivity realizovať na ktorých zdrojoch. **Zdrojmi** môžu byť vodiči autobusov, stroje v dielni, viacnásobné/viacjadrové procesory, dopravné prostriedky, robotníci na pracovisku a veľa iného. **Aktivitami** môžu byť turnusy¹ v autobusovej doprave, úlohy (operácie) vo výrobnom procese, vykonávanie počítačových programov, etapy pri stavebnom projekte a iné. Každá aktivita má naplánovanú dobu trvania.

V reálnom živote sa stretávame so zrovnomenovaním pracovných zaťažení/výkonov strojov/vodičov za dané časové (periodické) obdobie rozvrhovania. Aby sme vedeli optimalizovať rovnomernosť rozvrhov, potrebujeme poznať **mieru nerovnomernosti** [2], ktorá je jednou z optimalizovaných kritériálnych funkcií a môže nadobúdať nasledujúci tvar

$$f_{dev}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{|x_i - \bar{x}|}{\bar{x}} \quad (1)$$

Za predpokladu, že vytvárame rozvrh vo verejnej doprave, predstavujú jednotlivé premenné x_1 až x_m **plánované** kumulované pracovné zaťaženia m vodičov a $\bar{x}$ je ideálnym pracovným zaťažením. V tomto prípade priemernou hodnotou, ktorú spočítame ako

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \quad (2)$$

Rozvrhy, ktoré vznikli optimalizáciou miery nerovnomernosti, nazývame **rovnomernými rozvrhmi**. Vzhľadom na známu Grahamovu [1] klasifikáciu ide o neštandardný typ rozvrhov

2. Matematická formulácia

Rovnomerné rozvrhy môžeme zovšeobecniť a matematicky formulovať ako kombinatorický problém rovnomernosti riadkových súčtov stĺpcovo permutovanej matice, ktorý anglicky označujeme ako matrix permutation problem *MPP* [4]. Vhodným preusporiadaním stĺpcov matice môžeme doceliť väčšiu rovnomernosť riadkových súčtov matice/rozvrhu.

Definícia 2.1. (Matrix permutation problem [3])

Nech $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ a $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ sú konečné neprázdne množiny a nech $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ je reálna matica rozmeru $m \times n$. Hľadá sa taká matica permutácií $\Psi = (\psi_j)_{j \in \mathcal{N}}$ stĺpcov matice $\mathbb{A}$ pre ktorú platí:

$$\min \left\{ f(s_1^\psi, s_2^\psi, \dots, s_m^\psi) \mid s_i^\psi = \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{\psi_j, i}, \forall i \in \mathcal{M}, \right. \\ \left. \psi_j = (\psi_{1j}, \psi_{2j}, \dots, \psi_{mj}) \in \Pi(\mathcal{M}), \forall j \in \mathcal{N} \right\}$$

kde f je nejaká miera nerovnomernosti vektora reálnych čísel, s_i^ψ je i -ty riadkový súčet matice $\mathbb{A}^\psi$ a $\Pi(\mathcal{M})$ je množina všetkých permutácií množiny $\mathcal{M}$. Riešením takto formulovanej úlohy *MPP* je matica $\mathbb{A}^\psi = (a_{\psi_j, i})$

MPP je zložitosti $O((m!)^n)$. Z tohoto dôvodu sú exaktne riešiteľné len veľmi malé inštancie. Na riešenie veľkých inštancií môžeme použiť heuristické metódy. Najznámejšou a najvhodnejšou heuristickou metódou, ktorá je veľmi rýchla a dosahuje veľmi dobré výsledky, je stochastická-dekompozičná metóda [3,4].

Príklad 2.1. (Rozpisovanie služieb vodičom autobusov, alias (MPP))

Majme 4 vodičov autobusov a 5 pracovných dní. Pre každý pracovný deň majú byť pridelené 4 turnusy, pričom prvok a_{ij} matice $\mathbb{A} = (a_{ij} \in \mathfrak{R})$ zodpovedá pracovnému času [min] i -teho turnusu v j -ty deň a vektor $S = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T$ predstavuje štyri riadkové súčty matice $\mathbb{A}$

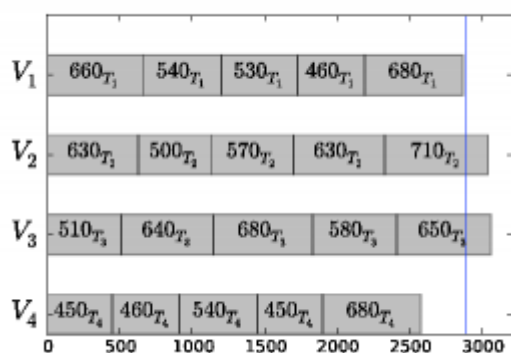
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 660 & 540 & 530 & 460 & 680 \\ 630 & 500 & 570 & 630 & 710 \\ 510 & 640 & 680 & 580 & 650 \\ 450 & 460 & 540 & 450 & 680 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2870 \\ 3040 \\ 3060 \\ 2580 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Hodnota ideálneho kumulovaného výkonu vodiča je podľa (2) rovná hodnote $\bar{s} = 2887,5$. Tvorca rozvrhu chce priradiť vodičom turnusy na jednotlivé dni tak, aby hodnota miery nerovnomernosti (1) bola minimálna. Ak ich priradí každý deň rovnako, tak že i -ty vodič dostane priradený i -ty turnus, t.j. $\psi_{ij} = i$, tak je miera nerovnomernosti rovná hodnote $f_{dev} = 0.056$ s odpovedajúcimi riadkovými súčtami S (3). Hodnota miery nerovnomernosti nás informuje o tom, že týždenné výkony vodičov sú priemerne odchylené od ideálnej hodnoty o 5,6%. Rozvrh môžeme vidieť na obrázku 1(a) a riadkové súčty na obrázku 1(b).

	pon	uto	str	stv	pia	
V_1	T1	T1	T1	T1	T1	
V_2	T2	T2	T2	T2	T2	
V_3	T3	T3	T3	T3	T3	
V_4	T4	T4	T4	T4	T4	
	0	24	48	72	96	120

(a) Nerovnomerný rozvrh – týždenný



(b) Nerovnomerný rozvrh – kumulované pracovné časy

Obr. 1: Nezrovnomernený rozvrh služieb vodičov autobusov. Modrá horizontálna čiara predstavuje ideálny kumulovaný výkon vodiča $\bar{s}$

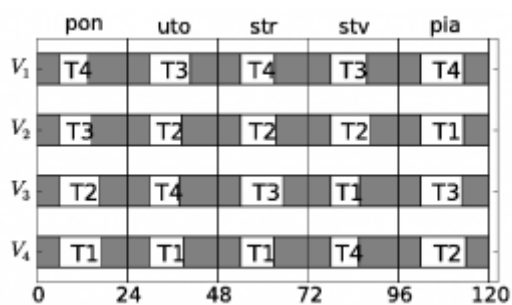
Teraz tvorca rozvrhu použije stochastickú-dekompozičnú metódu [3,4] a pomocou nej vygeneruje nasledovnú maticu permutácií Ψ , výsledný rozvrh reprezentovaný maticou A^ψ a vektor riadkových súčtov S^ψ matice A^ψ .

$$\Psi = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

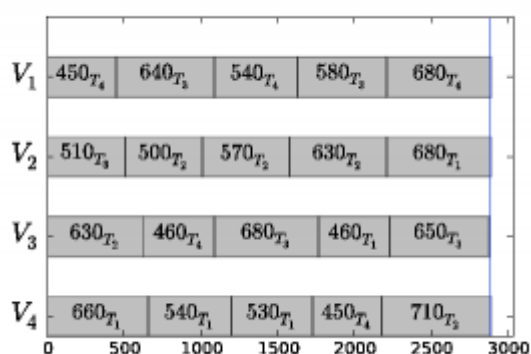
$$A^\psi = \begin{pmatrix} 450 & 640 & 540 & 580 & 680 \\ 510 & 500 & 570 & 630 & 680 \\ 630 & 460 & 680 & 460 & 650 \\ 660 & 540 & 530 & 450 & 710 \end{pmatrix}$$

$$S^\psi = \begin{pmatrix} 2890 \\ 2890 \\ 2880 \\ 2890 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Pre tento rozvrh získavame nasledujúcu hodnotu miery nerovnomernosti $f_{dev} = 0.001$ s odpovedajúcimi riadkovými súčtami S^ψ (4). Vidíme, že rozvrh získaný heuristickou metódou je viac zrovnomenený. Rozvrh môžeme vidieť na obrázku 2(a) a riadkové súčty na obrázku 2(b).



(a) Rovnomerný rozvrh - týždenný



(b) Rovnomerný rozvrh - kumulované pracovné časy

Obr. 2: Zrovnomenený rozvrh služieb vodičov autobusov. Modrá horizontálna čiara predstavuje ideálny kumulovaný výkon vodiča $\bar{s}$

Veľmi zaujímavá varianta problému (MPP) vzniká pre dvojriadkovú variantu matice A . Exaktné riešenie MPP^{2r} problému môže poslúžiť v heuristických metódach na získanie dobrého riešenia problému MPP . Nasledujúci text objasňuje problematiku riešenia problému MPP^{2r} pomocou klasickej úlohy o batohu.

3. Dvojriadková matica

Klasická úloha o batohu KUB je jednou z najznámejších a najpoužívanějších úloh matematického lineárneho programovania a tvorí jadro mnohých heuristických metód. Jej matematická formulácia je nasledovná.

Definícia 3.1. (Klasická úloha o batohu KUB)

Úlohu o batohu môžeme formulovať ako úlohu, v ktorej máme predmety rôznych cien a hmotností zabaliť do batohu tak, aby jeho hodnota bola čo možno najväčšia a nebola

prekročená jeho nosnosť. Nech N , $|N| = n$ je konečná množina, c je n -prvkový vektor cien predmetov, a je n -prvkový vektor hmotností predmetov, b je nosnosť batohu a x je n -prvkový vektor rozhodovacích premenných. Potom úlohu o batohu možno formulovať ako nasledujúcu úlohu bivalentného lineárneho programovania.

$$\left. \begin{array}{l} \max Z = \sum_{j \in N} c_j x_j \\ s.t. \\ \sum_{j \in N} a_j x_j \leq b \\ x_j \in \{0, 1\}, \text{ pre } \forall j \in N \end{array} \right\} \quad (5)$$

Problém rovnomernosti riadkových súčtov stĺpcovo permutovanej dvojriadkovej matice $\mathcal{MPP2r}$ môžeme exaktne riešiť pomocou nie zložitej transformácie na klasickú úlohu o batohu KUB .

Veta 3.1. (Transformácia $\mathcal{MPP2r}$ na KUB)

Pre danú maticu $\mathbb{D} = (d_{ij})$ typu $2 \times n$ a maticu permutácií $\Psi = (\psi_j)_{j \in N}$ množiny $\mathcal{M} = \{1, 2\}$ môžeme úlohu $\mathcal{MPP2r}$ pretransformovať na klasickú úlohu o batohu pomocou substitúcie

$$c_j = a_j = d_{1j} - d_{2j}, \quad \text{pre } \forall j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

a

$$b = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (d_{1j} - d_{2j}) \quad (7)$$

kde vektor rozhodnutí $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ priradenia predmetu do batohu formulujeme ako

$$\psi_j = \begin{cases} (1, 2), \text{ vlozime } j\text{-ty predmet do batohu, t.j. } x_j = 1 \\ (2, 1), \text{ nevlozime } j\text{-ty predmet do batohu, t.j. } x_j = 0 \end{cases}$$

Dôkaz (Transformácia $\mathcal{MPP2r}$ na KUB)

Majme maticu $\mathbb{D} = (d_{ij})$ rozmeru $2 \times n$, pre ktorú hodnotu ideálneho riadkového súčtu spočítame ako

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (d_{1j} + d_{2j})$$

Nech $\Psi = (\psi_j)_{j \in N}$ je matica permutácií a nech vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ predstavuje rozhodnutia, ktoré môžeme formulovať ako:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{potom } \psi_j = (1, 2) \\ 0 & \text{potom } \psi_j = (2, 1) \end{cases}$$

Aby boli riadkové súčty matice čo najrovnomernejšie, alebo aby sa v ideálnom prípade rovnali ideálnemu riadkovému súčtu, potom musí urobiť tvorca rozvrhu také rozhodnutia x , pre ktoré platí nasledujúca rovnosť

$$\sum_{j=1}^n d_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n d_{2j}(1 - x_j) = \bar{s},$$

ktorú môžeme po dosadení $\bar{s}$ a pomocou substitúcií

$$c_j = a_j = d_{1j} - d_{2j}ab = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (d_{1j} - d_{2j})$$

prepísať na tvar

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = b$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme rovnosť rozpísať na nerovnosti

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j - b \geq 0 \quad (8)$$

Aby sme úspešne transformovali zadanú úlohu na model úlohy o batohu, môžeme z ľavej strany nerovnosti (9) vypustiť konštantu b a použiť nerovnosť ako účelovú funkciu, ktorú maximalizujeme. Prvá nerovnosť (8) zaručuje, že súčet prvého riadku nepresiahne hodnotu b . Druhá nerovnosť (9) (účelová funkcia) sa naopak pokúša naakumulovať súčet prvého riadku čo najtesnejšie k hodnote b . Po takýchto úpravách získavame model klasickej úlohy o batohu (5).

Príklad 3.1. (Ilustračný príklad problému $MPP2r$)

Príkladom aplikácie *KUB* pri tvorbe rovnomerných rozvrhov môže byť nasledujúca úloha: Nech elementy matice $\mathbb{D} = (d_{ij})$ rozmeru 2×5 predstavujú pracovné časy i-teho turnusu, ktorý máme prejsť v j-ty deň.

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 35 & 45 & 25 & 45 & 20 \\ 25 & 30 & 22 & 30 & 35 \end{pmatrix}$$

Pre každý deň 5-dňového obdobia máme rozhodnúť o tom, ktorému z dvojice vodičov pridelieme ktorý turnus, tak aby celkové kumulované výkony oboch vodičov, boli čo najviac rovné ideálnemu výkonu

$$\bar{s} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (d_{1j} + d_{2j}) = 156$$

za celé časové obdobie. Nech vektor x predstavuje rozhodnutia, ktoré môžeme formulovať ako: x_j

- 1 - Ak sa rozhodneme priradiť prvému vodičovi prvý turnus s časom spracovania d_{1j} a druhému vodičovi druhý turnus s časom spracovania d_{2j} v j-ty pracovný deň,
- 0 - Ak sa rozhodneme priradiť prvému vodičovi druhý turnus s časom spracovania d_{2j} a druhému vodičovi prvý turnus s časom spracovania d_{1j} v j-ty pracovný deň.

Nech usporiadaná päťica $c = a = (10, 15, 3, 15, -15)$ predstavuje cenu a váhu predmetu a $b=14$ predstavuje nosnosť batohu. Riešením úlohy (5) získame nasledujúcu usporiadanú päťicu rozhodnutí $x = (1, 1, 1, 0, 1)$. Potom matica permutácií Ψ je rovná

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a riadkové súčty sú rovné $s^\Psi = (155, 157)$.

4. Neistá veľkosť aktivít

V praxi dochádza k odchýleniu plánovaných pracovných časov turnusov, od skutočne sa zrealizovaných časov jazd vodičov, čo môže mať zásadný dopad na celkovú rovnomernosť rozvrhu. Tento nedostatok sa pokúsime vyriešiť robustnejším modelovaním pracovných časov turnusov. Ak máme k dispozícii štatistiku minulých realizácií turnusov, tak môžeme pomocou teórie pravdepodobnosti modelovať plánované časy turnusov pomocou náhodných premenných. Ak štatistiku k dispozícii nemáme, tak pravdepodobnostné rozdelenia navrhujeme pomocou dosiahnutých skúseností v danom obore, čo je prípad nasledujúceho textu.

Pravdepodobné správanie sa **náhodných premenných** môžeme popísať zákonom rozdelenia pravdepodobnosti. Kvôli jednoduchosti sa obmedzíme v nasledujúcom texte na normálne rozdelenie pravdepodobnosti $N(\mu, \sigma^2)$ [5].

Definícia 4.1. (Normálne rozdelenie pravdepodobnosti)

Náhodná premenná X má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ^2 , ak jej funkcia hustoty pravdepodobnosti (pdf) je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathcal{R} \quad (10)$$

Zapisujeme: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Parametrami normálneho rozdelenia sú: μ - stredná hodnota a σ - smerodajná odchýlka.

Pri transformácii $MPP2r$ problému na KUB sme použili operácie sčítania a odčítania dvoch alebo viacerých reálnych hodnôt. V nasledujúcom texte ale potrebujem tieto operácie vykonávať s náhodnými premennými. Nasledujúca veta formalizuje spôsob sčítania (odčítania) dvoch náhodných premenných.

Veta 4.1. (Vlastnosti normálneho rozdelenia [6, 7])

Ak X a Y sú nezávislé náhodné premenné normálneho rozdelenia, potom $X+Y$ je taktiež normálneho rozdelenia, t.j. ak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $Y \sim N(\nu, \tau^2)$ a X a Y sú nezávislé, potom $Z = X + Y \sim N(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$.

Ak X je náhodná premenná normálneho rozdelenia, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom lineárna forma $aX+b$, pre $a, b \in \mathfrak{R}$, je taktiež normálneho rozdelenia, t.j. $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Ak X a Y sú nezávislé náhodné premenné normálneho rozdelenia, potom $aX + bY$, $a, b \in \mathfrak{R}$ je taktiež normálneho rozdelenia, t.j. ak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $Y \sim N(\nu, \tau^2)$ a X a Y sú nezávislé, potom $Z = aX + bY \sim N(a\mu + b\nu, a^2\sigma^2 + b^2\tau^2)$.

Dôkaz. (Vlastnosti normálneho rozdelenia)

Dôkaz môžeme nájsť na internetovej stránke otvorenej slovenskej online encyklopédie so slobodným obsahom [6], [7].

V predošlom texte sme v $\mathcal{MPP}^{2r}$ probléme modelovali pracovné časy turnusov pomocou reálnych čísel. Následne sme tento problém transformovali pomocou vety 3.1 na klasickú úlohu o batohu KUB s reálnymi koeficientami v účelovej funkcii a podmienkach. Teraz ale chceme modelovať v $\mathcal{MPP}^{2r}$ probléme pracovné časy turnusov pomocou náhodných premenných normálneho rozdelenia (4.1) a transformovať ho na stochastickú úlohu o batohu SUB , ktorú vieme riešiť pomocou teórie stochastického programovania [2]. Pre ľahšie porozumenie problematiky uvádzame nasledujúci ilustračný príklad.

Príklad 4.1. (Ilustračný príklad stochastického $\mathcal{MPP}^{2r}$ problému)

Uvažujme rozvrhovaciu úlohu (príklad 3.1) pre dvoch vodičov na týždeň (5 pracovných dní), kde prvok d_{ij} matice $\mathbb{D}$ rozmeru 2×5 predstavuje \textbf{plánované} pracovné časy i-teho turnusu, ktorý máme prejsť v j-ty deň

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 35 & 45 & 25 & 45 & 20 \\ 25 & 30 & 22 & 30 & 35 \end{pmatrix}$$

Pre každý deň päť dňového obdobia máme rozhodnúť o tom, v akom poradí prideliť dvojicu turnusov dvojici vodičov, tak aby celkové kumulované výkony oboch vodičov, boli čo najviac rovné ideálnemu výkonu za celé časové obdobie.

Nech $\mathcal{M} = \{1, 2\}$ je množina indexov vodičov a nech $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je množina indexov dní. Modelujme **predpokladané** odchýlky plánovaných časov (vid'. matica $\mathbb{D}$) od skutočne sa zrealizovaných časov jázd vodičov autobusov pomocou náhodnej matice $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{u}_{ij})$ rozmeru 2×5 a predpokladajme, že pre každý nasledujúci deň je náš odhad pracovných časov turnusov viac nepresný. Prvkami $\tilde{u}_{ij}$ tejto matice sú náhodné premenné normálneho rozdelenia, tzv.

$$\text{dist } \tilde{u}_{ij} \sim N(\mu, \sigma_j^2), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}, \quad (11)$$

kde $\mu = 0$ a $\sigma_j^2 = 2j - 1, \forall j \in \mathcal{N}$.

Pretransformujme teraz $\mathcal{MPP}^{2r}$ problém na stochastickú úlohu o batohu SUB pomocou nasledujúcich výpočtov:

1. Cenu a váhu j-teho predmetu vyjadríme ako

$$c_j(\tilde{\xi}) = a_j(\tilde{\xi}) = d_{1j} - d_{2j} + \tilde{\xi}_j, \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

kde $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_5)$ je náhodný vektor s realizáciami $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5)$, ktorého prvky spočítame ako

$$\tilde{\xi}_j = \tilde{u}_{1j} - \tilde{u}_{2j}, \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

a podľa vety 4.1 platí $\tilde{\xi}_j \sim N(0, 2\sigma_j^2), \forall j \in \mathcal{N}$. Pretože je normálne rozdelenie neohraničené, obmedzíme sa s realizáciami ξ náhodného vektora ξ na 99% konfidenčné intervaly

$$\xi_j \in [\mu - 2.576\sigma_j, \mu + 2.576\sigma_j], \quad \forall j \in \mathcal{N} \quad (12)$$

Teraz môžeme vektor $c(\tilde{\xi})$ zapísať ako

$$c(\tilde{\xi}) = (10 + \tilde{\xi}_1, 15 + \tilde{\xi}_2, 3 + \tilde{\xi}_3, 15 + \tilde{\xi}_4, -15 + \tilde{\xi}_5)$$

a platí

$$c_j(\tilde{\xi}) \sim N(d_{1j} - d_{2j}, 2\sigma_j^2), \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

2. Nosnosť batohu spočítame ako

$$b(\tilde{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}} c_j(\tilde{\xi}) = 14 + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}} \tilde{\xi}_j$$

a platí

$$b(\tilde{\xi}) \sim N\left(\frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}} c_j, \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}} \sigma_j^2\right)$$

Matematický model stochastickej úlohy o batohu *SUB* môžeme teraz formulovať ako:

$$\left. \begin{aligned} \max Z &= E_{\tilde{\xi}}[\sum_{j \in \mathcal{N}} c_j(\tilde{\xi})x_j] \\ &\text{s.t.} \\ \sum_{j \in \mathcal{N}} a_j(\tilde{\xi})x_j &\leq b(\tilde{\xi}) \\ x_j &\in \{0, 1\}, \text{pre } \forall j \in \mathcal{N} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

kde $E_{\tilde{\xi}}$ predstavuje priemernú hodnotu vzhľadom na pravdepodobnostné rozdelenie $\tilde{\xi}$.

Aby sme si pri riešení problému (13) ušetrili nepríjemnosti spojené so spojitým normálnym rozdelením, aproximujme toto spojité rozdelenie diskretným [2]. Pre tento účel

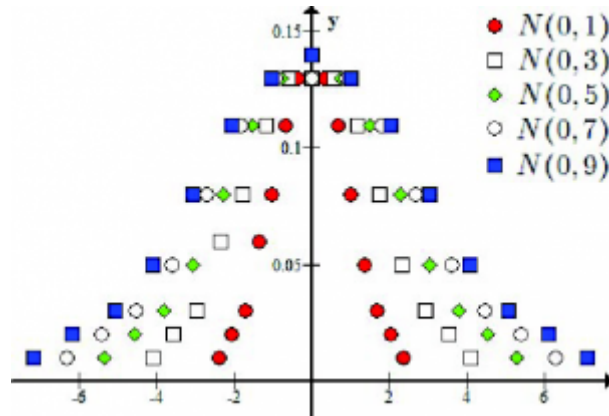
- generujeme pre každé $j \in \mathcal{N}$ súbor realizácií $\xi_j^u, u = 1, \dots, K$ obmedzených na 99% konfidenčné intervaly. Veľkosť súborov je $K = 15000$;
- ekvidištanečne rozdelíme 99% konfidenčné intervaly (12) na $r=15$ podintervalov, r je počet realizácií $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_5)$
- pre každý podinterval I_{jv} , kde $v = 1, \dots, r, j \in \mathcal{N}$ spočítame aritmetický priemer $\bar{\xi}_j^v = q_{jv}/k_{jv}$, kde q_{jv} a k_{jv} sú porade súčet a počet realizácií ξ_j^u obsiahnutých v I_{jv}
- pre každý podinterval I_{jv} spočítame relatívnu frekvenciu $p_{jv} = k_{jv}/K$

Tieto diskkrétne pravdepodobnostné rozdelenia

$$\{(\bar{\xi}_j^v, p_{jv}), v = 1, \dots, r\}, \text{ kde } j \in \mathcal{N}, \quad (14)$$

sú ďalej použité ako aproximácie daných normálnych rozdelení a môžeme ich vidieť na

obrázku 3.



Obr. 3: Diskrétna pravdepodobnostná rozdeľenia, ktoré vznikli diskretizáciou spojitých normálnych rozdeľení (11), ktorých realizácie patria do 99% konfidenčných intervalov (12).

Nech $\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, r\}$ je množina indexov realizácií ξ náhodného vektora $\tilde{\xi}$ diskrétného pravdepodobnostného rozdeľenia (14). Teraz môžeme prepísať stochastickú úlohu o batohu (13) na klasický deterministický bivalentný problém

$$\left. \begin{aligned} \max Z &= \sum_{v \in \mathcal{R}} p_v \sum_{j \in \mathcal{N}} c_j(\xi^v) x_j \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j \in \mathcal{N}} a_j(\xi^v) x_j &\leq b(\xi^v), \quad \forall v \in \mathcal{R} \\ x_j &\in \{0, 1\}, \text{ pre } \forall j \in \mathcal{N} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

kde vzhľadom na vzájomnú nezávislosť prvkov náhodného vektora $\tilde{\xi}$, môžeme vypočítať pravdepodobnosť realizácie ξ^v ako

$$p_v = \prod_{j \in \mathcal{N}} p_{jv}, \quad \forall v \in \mathcal{R}$$

Riešením stochastického problému (15) je vektor rozhodnutí $x = (1, 1, 1, 0, 1)$, pre ktorý je matica permutácií Ψ je rovná

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poznámka 1. (Ilustračný príklad stochastického $\mathcal{MPP}^{2r}$ problému)

Z (11) vidíme, že pre každý nasledujúci deň rozvrhovania je väčší rozptyl normálneho rozdeľenia pravdepodobnosti, čo vedie k predpokladu, že pre každý nasledujúci deň je náš odhad pracovných časov turnusov viac nepresný. Otázkou ostáva, či stratégia ktorá pre každý nasledujúci deň zväčšuje tento rozptyl, alebo stratégia ktorá znižovať tento rozptyl, vedie na optimálny rozvrh vzhľadom na optimalizačné kritérium

$$f_{dev} = (f_{dev}(S^P) - f_{dev}(S^R))^2,$$

kde $f_{dev}(\cdot)$ je miera nerovnomernosti (1) a S^P je vektor riadkových súčtov rozvrhu s naplánovanými časmi turnusov a S^R je vektor skutočne sa zrealizovaných časov jazd

vodičov.

Od počtu realizácií r náhodného vektora ξ v j -tom dni sa môže stať program (15) príliš veľkým a komplexným.

5. Záver

Článok sa venoval problematike riešenia rovnomerných rozvrhov, kde veľkosť aktivít pridelených zdrojom v danom čase je modelovaná pomocou náhodných premenných normálneho rozdelenia. Náhodné premenné sú zvolené namiesto reálnych čísel kvôli ich schopnosti zachytiť dostatočné množstvo informácie potrebnej na vytvorenie požadovaného optimálneho rozvrhu, ktorý je vhodný pre každú realizáciu náhodnej premennej. Problematiku rovnomerných rozvrhov vieme zovšeobecniť a matematicky formulovať pomocou problému rovnomernosti riadkových súčtov stĺpcovo permutovanej matice [3,4], ktorý v angličtine vystupuje pod názvom "Matrix Permutation Problem".

Pre nás zaujímavou variantou je problematika dvojriadkovej matice, ktorej prvky modelujem pomocou náhodných premenných. Problematiku rovnomernosti riadkových súčtov stĺpcovo permutovanej stochastickej dvojriadkovej matice transformujeme na stochastickú úlohu o batohu a riešiť pomocou teórie stochastického programovania [2] zmenou na vhodný deterministický model bivalentného programovania.

Podakovanie

áto práca vznikla s podporou grantovej agentúry VEGA vrámci riešenia projektu 1/0374/11 "Modelovanie a optimalizácia mobility a infraštruktúry v logistických sieťach".

Literatúra

1. Graham, R.L., Lawler, E.L., Lenstra, J.K., Rinnooy Kan, A.H.G., Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling: A Survey, 1979
2. Kall, P., Wallace, S.W., Stochastic programming, ISBN 0471951080, 1994
3. Peško, Š., Optimalizácia NP-ťažkých dopravných rozvrhov, ŽU Žilina, Habilitačná práca, 2002
4. Peško, Š., The Matrix Permutation Problem in Interval Arithmetic, Journal of Information, Control and Management Systems, vol. 1, num. 1, 2006
5. Teória pravdepodobnosti, Internetový zdroj, <http://www.graduate.sk/Handlers/Download.ashx?Id=136>
6. Sum of normally distributed random variables, From Wikipedia, the free encyclopedia, 2011
7. Normal distribution, From Wikipedia, the free encyclopedia, 2011

¹Turnus je denný pracovný cyklus, ktorý má byť odjazdený vodičom v danom dni a pozostáva z postupnosti trás. Trasa je súbor jász a jazda pozostáva z príslušného času (miesta) odchodu a príchodu autobusu.

