

Prechodné javy v lineárnych elektrických obvodoch - elektronická lekcia

Hajro Lukáš · Elektrotechnika, Informačné technológie, Študentské práce

18.01.2012



Príspevok pojednáva o výsledkoch práce venovanej štúdiu prechodných javov v elektrických obvodoch, ich riešeniu a zhrnutiu získaných poznatkov do podoby elektronickej lekcie.

1. Úvod

V práci sa zaoberáme prechodnými javmi v lineárnych elektrických obvodoch, spôsobom ich riešenia ako aj riešením samotným. Práca začína teoretickou časťou, ktorá nás oboznamuje s prechodnými javmi a príčinou ich vzniku. V ďalšej časti sa zameriavame už na samotné riešenie. Tam sa oboznamujeme s možnosťami riešenia prechodných javov, integrálnymi transformáciami a postupmi riešenia. Ďalšou časťou sú potom konkrétne riešené príklady, v ktorých je možné porovnať si priebehy hľadaného prúdu, resp. napätia pre rôzne hodnoty parametrov akumuláčnych prvkov. Poslednou časťou tejto práce je nadviazanie na už existujúcu elektronickú lekciu vo výukovom prostredí Moodle a doplnenie do nových, prípadne vylepšenie existujúcich častí tejto lekcie.

2. Kurz Prechodné javy

Kurz Prechodné javy sa nachádza na stránke Katedry mikroelektroniky Fakulty elektrotechniky a informatiky STU na portáli eLearn Central. Na začiatku elektronickej lekcie podávame vysvetlenie toho, čo sú to prechodné javy, kedy a prečo vznikajú. Oboznamujeme sa s tým, ktoré prvky lineárnych elektrických obvodov majú vplyv na vznik prechodného javu. Dozvedáme sa o integrálnych transformáciách a ich použití pri riešení prechodných javov a následne prechádzame na riešenie a postup pri riešení. Ďalšia časť obsahuje vypracované postupy riešenia prechodných javov pre rôzne napäťové zdroje. Poslednou časťou sú ďalšie riešené príklady, kde je možnosť vidieť výsledné priebehy pre viac hodnôt parametrov akumuláčnych prvkov.

Lekcia je rozdelená na väčšie kapitoly, pričom každá z nich obsahuje niekoľko článkov. Názvy väčších kapitol sú:

- Prechodné javy
- Príklady riešenia prechodných javov
- Riešenie prechodných javov v operátorovej oblasti
- Postup riešenia pri jednosmerných zdrojoch

- Postup riešenia pri obvodoch s harmonickými zdrojmi
- Postup riešenia špecifických prechodných javov
- Riešené príklady
- Riešenie pre špeciálny priebeh vstupného napätia



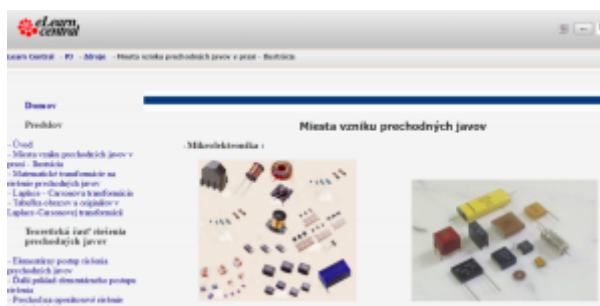
Obr. 1: Časť kurzu

3. Obsah niektorých kapitol kurzu

3.1. Prechodné javy

Prechodné javy sú javy, ktoré v elektrických obvodoch vznikajú pri náhlej zmene ich ustáleného stavu. Prechodný jav je proces, pri ktorom obvod neperiodicky mení veľkosť akumulovanej energie. K zmene ustáleného stavu obvodu dochádza buď pri skokovej zmene zdrojového napätia (jeho odpojenie alebo pripojenie do obvodu, zmena jedného alebo viacerých jeho parametrov – amplitúda, frekvencia, fáza a pod.) alebo pri zmene štruktúry obvodu (pripojenie alebo odpojenie časti obvodu, skratovanie alebo prerušenie úseku obvodu, zmena hodnoty obvodového prvku a pod.).

Prechodné javy môžu vzniknúť iba v takých obvodoch, ktoré obsahujú aspoň jeden akumulačný prvok, teda prvok, ktorý dokáže nahromadiť energiu a v určitom časovom intervale ju dodávať do obvodu. Znamená to, že obvod musí obsahovať aspoň jednu cievku alebo aspoň jeden kondenzátor. Len v takomto prípade dochádza k vyrovnávaniu energetických pomerov v nenulovom čase. V prípade čisto odporového obvodu (obsahujúceho zdroje a ideálne rezistory) k prechodnému javu nemôže dôjsť, pretože odpory nie sú schopné prijatú energiu akumulovať a premieňajú ju na teplo.



Obr. 2: Príklady akumulačných súčiastok v kurze

Výpočet prechodných javov v lineárnych elektrických sieťach so sústredenými parametrami sa dnes robí zásadne dvoma spôsobmi a to:

- analytickou metódou - pre daný obvod napíšeme rovnice prvého a druhého Kirchhoffovho zákona pre okamžité hodnoty napätia a prúdu, čím dostaneme sústavu integrálno-diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientmi. Po vyriešení tejto sústavy s uvážením počiatočných podmienok dostaneme výsledné časové funkcie pre prúdy a napätia,
- operátorovou metódou - zavedieme vhodné komplexné funkcie tak, aby systém diferenciálnych rovníc prešiel na systém obyčajných algebraických rovníc pre zvolenú komplexnú premennú.

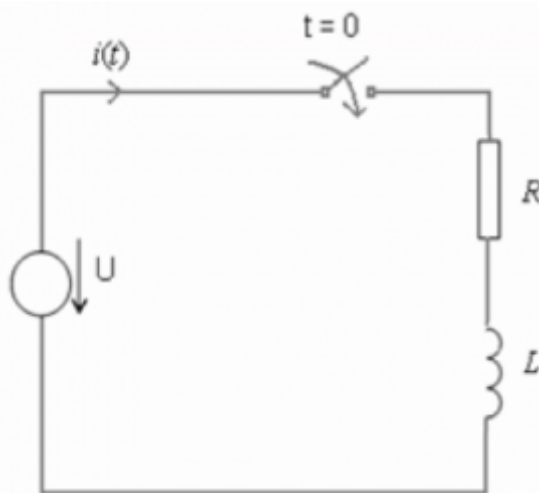
Pre počítanie prechodných javov v operátorovom tvare je výhodné použiť Laplace-Carsonovu integrálnu transformáciu, pretože sa pri nej zachováva rozmer veličín. Najčastejšie tvary funkcií vhodné na úpravu priamou alebo spätnou transformáciou sú v kurze uvedené v tabuľke.

$f(t)$	$\tilde{f}(p)$
1(t)	1
$\delta(t)$	p
$e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{p}{p \pm \alpha}$
1(t)	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^k}{k!} 1(t)$	$\frac{1}{p^{k+1}}$
$(1 - e^{-\alpha t}) 1(t)$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$t e^{-\alpha t} 1(t)$	$\frac{p}{(p + \alpha)^2}$
$e^{-\alpha t} (1 - \alpha t) 1(t)$	$\frac{p^2}{(p + \alpha)^3}$

Obr. 3: Tabuľka LC transformácie v kurze

3.2. Príklady riešenia prechodných javov

Na jednoduchom príklade (obr. 4) riešime prechodný jav použitím klasickej metódy:



Obr. 4: Schéma zapojenia obvodu

Po zopnutí spínača dochádza k prechodnému javu. Obvodom začína tiecť prúd, pre ktorý platí rovnica druhého Kirchhoffovho zákona:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) - \frac{U}{L} = 0 \quad (1)$$

Po separácii premenných a vhodnej úprave dostávame riešenie pre prúd:

$$i(t) = \frac{U}{R} K e^{-\frac{R}{L}t} \quad (2)$$

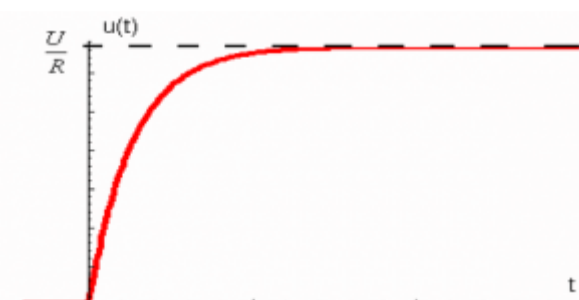
Integračnú konštantu K určíme zo znalosti toho, že v čase $t = 0$ bol prúd rovný nule. Dosadíme za prúd, aj čas nulu a po úprave dostaneme:

$$K = -\frac{U}{R} K e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3)$$

Výsledný vzťah pre prúd je teda:

$$i(t) = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (4)$$

Závislosť prúdu od času vyzerá nasledovne:



Obr. 5: Priebeh výsledného prúdu

3.3. Riešenie prechodných javov v operátorovej oblasti

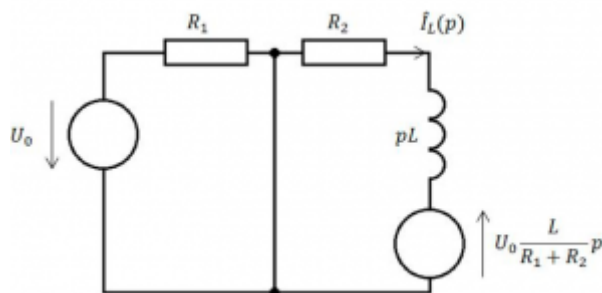
V ďalšom príklade riešime prechodný jav pomocou operátorovej metódy. Na nasledujúcom obrázku je zobrazené, ako je príklad zadaný v kurze.

Obr. 6: Zadanie príkladu v kurze

Keďže príklad má nenulovú počiatočnú podmienku, jeho riešenie začína v čase $t < 0$. V takom prípade nahrádzame cievku skratom a riešime jednoduchý čisto odporový obvod. Preto na výpočet prúdu tečúceho obvodom pred zopnutím spínača použijeme Ohmov zákon:

$$i_L(0-) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \quad (5)$$

V ďalšom kroku počítame priebeh prúdu v čase od zopnutia spínača. V kurze pre tento čas uvádzame schému, v ktorej je doplnený napäťový zdroj do série s cievkou. Po Laplace-Carsonovej transformácii vyzerá táto schéma nasledovne:



Obr. 7: Schéma obvodu po LC transformácii

Keďže skratovaná ľavá časť je fakticky odpojená, venujeme sa len pravej časti schémy. Použitím 2. Kirchhoffovho zákona sme dostali rovnicu pre výpočet prúdu v operátorovom tvare. Po úprave tejto rovnice do tvaru vhodného na spätnú transformáciu sme dostali:

$$\hat{I}_L(p) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \frac{p}{p + \frac{R_2}{L}} \quad (6)$$

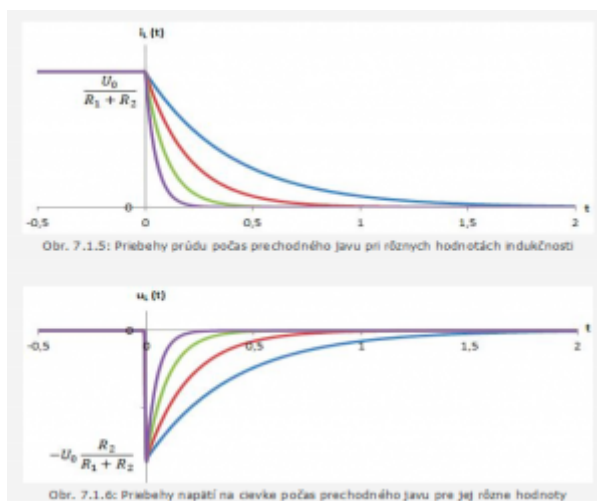
Po spätnej transformácii sme dostali výsledný vzťah pre prúd:

$$i_L(t) = \frac{U_0}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_2}{L}t} \mathbf{1}(t) \quad (7)$$

Pomocou Ohmovho zákona sme vypočítali napätie na cievke, ktoré je rovnaké ako na odpore R_2 . Vzťah pre napätie teda je:

$$u_L(t) = -U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_2}{L}t} \mathbf{1}(t) \quad (8)$$

V kurze je k tomuto príkladu priložený Excelovský súbor, kde je možné meniť parametre obvodu a podľa toho zobrazovať priebehy prúdu a napätia.



Obr. 8: Príklad zobrazenia priebehov pre štyri rôzne hodnoty indukčnosti

3.4. Riešenie pre špeciálny priebeh vstupného napätia

Ďalšou kapitolou našej elektronickej lekcie je riešenie ustáleného priebehu prúdu v obvode, ak vstupné napätie má taký priebeh, že v obvode sa prechodný jav periodicky opakuje.



Obr. 9: Zobrazenie príkladu v kurze

Na predchádzajúcom obrázku je nakreslená schéma zapojenia nášho ďalšieho príkladu. Ide teda o jednoduchý sériový RL obvod. Problém tohto príkladu teda nie je v obvode, ale v zdroji napätia, ktorého priebeh sa v lekcii nachádza pod schémou. Na začiatku riešenia tohto príkladu musíme zistiť, aká je matematická funkcia takého priebehu. Vieme, že jedna jej zložka je sínusová funkcia. Keďže v určitých časoch je sínusová funkcia nulovaná, tak môžeme povedať, že je násobená súčtom jednotkových skokových funkcií. Máme teda nasledujúce funkcie pre napätie:

$$u_1(t) = U \cdot \sin(\omega t) \quad (9)$$

$$u_2(t) = 1 \left(t - \frac{\alpha}{\omega} \right) - 1 \left(t - \frac{T}{2} \right) + 1 \left(t - \frac{T}{2} - \frac{\alpha}{\omega} \right) - 1 \left(t - T \right) \quad (10)$$

Po prenasobení funkcií (9) a (10) dostávame výslednú časovú funkciu $u(t)$, ktorú pretransformujeme do operátorovej podoby a pre jednu periódu dostaneme:

$$\hat{U}_T = U \frac{p}{p-j\omega} \left(1 - e^{-p\frac{T}{2}} \right) \left(e^{j\alpha} e^{-p\frac{\alpha}{\omega}} e^{-p\frac{T}{2}} \right) \quad (11)$$

Upravíme ju tak, aby bola periodická. Operátorový tvar prúdu potom získame podelením operátorového tvaru napätia a impedancie obvodu:

$$\hat{i} = U e^{j\alpha} \frac{p}{p-j\omega} \frac{e^{-p\frac{\alpha}{\omega}}}{1+e^{-p\frac{T}{2}}} \frac{1}{R+pL} + U \frac{p}{p-j\omega} \frac{e^{-p\frac{T}{2}}}{1+e^{-p\frac{T}{2}}} \frac{1}{R+pL} + \quad (12)$$

Vyjadrieme prechodnú zložku prúdu a úpravami rovnice dostaneme okamžitú hodnotu prechodnej zložky prúdu:

$$i_p = -\frac{U}{Z} \left[\sin(\alpha - \varphi) \frac{e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{\alpha}{\omega})}}{1 + e^{\frac{RT}{2L}}} 1(t - \frac{\alpha}{\omega}) + \sin(-\varphi) \frac{e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{T}{2})}}{1 + e^{\frac{RT}{2L}}} 1(t - \frac{T}{2}) \right] \quad (13)$$

Vypočítame celkový prúd i^* , vhodne upravíme a spätne transformujeme, aby sme získali časovú funkciu pre celkový prúd:

$$i^* = \frac{U}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{\alpha}{\omega})} \right] 1(t - \frac{\alpha}{\omega}) + \frac{U}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi - \frac{T}{2}\omega) \sin(-\varphi) e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{T}{2})} \right] 1(t - \frac{T}{2}) \quad (14)$$

pričom

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \text{ a } \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

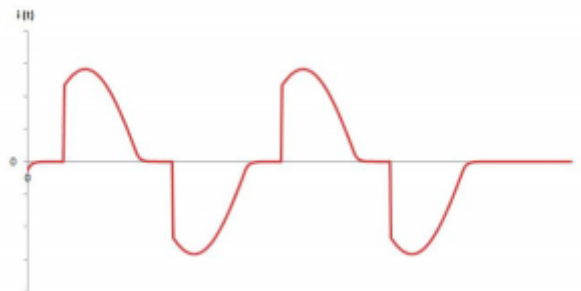
Pre ustálený prúd platí vzťah:

$$i_u = i^* - i_p \quad (15)$$

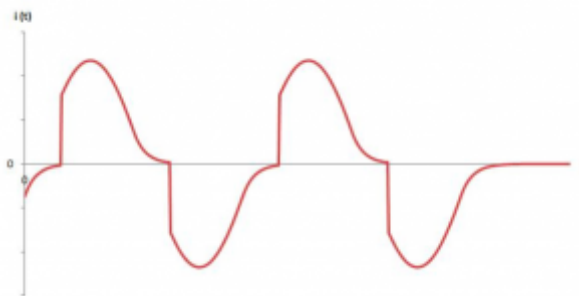
A teda výsledný vzťah pre ustálený prúd je je:

$$i_u = \frac{U}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi) \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{\alpha}{\omega})} \frac{e^{\frac{RT}{2L}}}{1 - e^{\frac{RT}{2L}}} \right] 1(t - \frac{\alpha}{\omega}) + \frac{U}{Z} \left[\sin(\omega t - \varphi - \frac{T}{2}\omega) \sin(-\varphi) e^{-\frac{R}{L}(t - \frac{T}{2})} \frac{e^{\frac{RT}{2L}}}{1 - e^{\frac{RT}{2L}}} \right] 1(t - \frac{T}{2}) \quad (15)$$

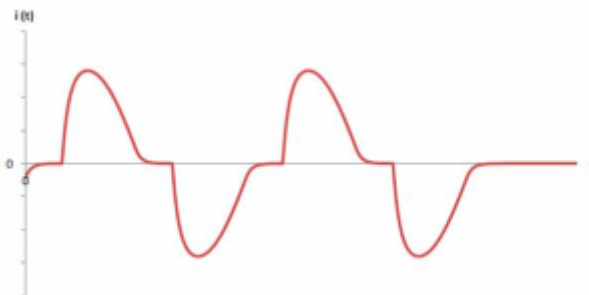
Tak, ako v kurze, aj tu uvádzame niekoľko priebehov ustáleného prúdu:



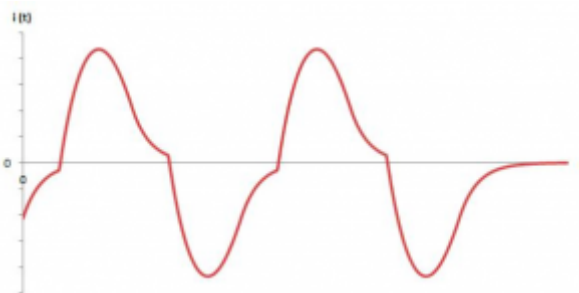
Obr. 10: Priebeh prúdu pre $R=1 \text{ k}\Omega$, $L=1/\pi \text{ H}$



Obr. 11: Priebeh prúdu pre $R=300 \text{ k}\Omega$, $L=1/\pi \text{ H}$



Obr. 12: Priebeh prúdu pre $R=1 \text{ k}\Omega$, $L=0,5 \text{ H}$



Obr. 13: Priebeh prúdu pre $R=300 \Omega$, $L=0,5 \text{ H}$

V kurze je k tejto kapitole priložený aj Excelovský súbor, čo umožňuje študentovi zmeniť hodnoty prvkov obvodu a podľa toho zmeniť výstupný priebeh prúdu.

4. Záver

Vytvorili sme elektronický materiál kurzu Prechodné javy. Kurz je umiestnený na portáli eLearn Central na <http://ec.elf.stuba.sk/moodle/course/view.php?id=151>. Súčasná verzia na tomto portáli používa LMS systém Moodle 1.8.2. Lekcia bude používaná vo vyučovaní ako doplnok štandardného vyučovania predmetov zaoberajúcich sa prechodnými javmi.

Odkazy na literatúru

1. MAYER, I., Teoretická elektrotechnika III, VŠT Košice, 1970
2. KNEPPO, L., Teoretická elektrotechnika - Prechodné javy v elektrických sieťach, SVŠT Bratislava, 1970
3. [3] Prechodé javy v elektrických obvodoch, STUBA, dostupné na internete: http://iris.elf.stuba.sk/~elo/elektricke_obvody/eo_ii_testpages/documents_pdf/prechjavy_a.pdf
4. Laplace-carsonova transformácia, STUBA, dostupné na internete: http://iris.elf.stuba.sk/~elo/elektricke_obvody/eo_ii_testpages/documents_pdf/prechjavy_

d.pdf

Spoluautorom článku je Ing. Jozefa Červeňová, PhD., Katedra teoretickej a experimentálnej elektrotechniky, Fakulta elektrotechniky a informatiky Slovenská Technická Univerzita Ilkovičova 3, Bratislava 812 19

Práca bola prezentovaná na Študentskej vedeckej a odbornej činnosti (ŠVOČ 2011) v sekcii e-Learning a web technológie v elektronike a získala Cenu IEEE, ISBN 978-80-227-3508-7
